OVERSIGT OVER DET KGL. DANSKE VIDENSKABERNES SELSKABS
FORHANDLINGER. 1906. N° 3

DIFFÉRENCES RÉCIPROQUES

PAR

T.-N. THIELE

COMMUNICATION FAITE DANS LA SÉANCE DU 12 JANVIER 1906

Par différences réciproques j'entends des nombres obtenus à l'aide d'un algorithme analogue à celui qui conduit aux différences divisées de Newton. En posant $A = f(a)$ et $B = f(b)$ nous définissons les différences réciproques de 1er ordre par l'équation

$$\left.\begin{aligned} \rho(a, b) &= \frac{a-b}{A-B} = \\ &= \begin{vmatrix} 1, a \\ 1, b \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & A \\ 1 & B \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Ces différences sont donc des fonctions symétriques de deux arguments variables, et leur forme dépend uniquement de celle que présente $X = f(x)$. Deux différences réciproques de ce genre, $\rho(a, b)$ et $\rho(b, c)$, ayant un argument, b, en commun ne sont qu'une même fonction des arguments a et c; on pourrait donc à la rigueur en former une nouvelle différence; mais l'expression

$$\frac{a-c}{\rho(a, b)-\rho(b, c)}$$

n'est symétrique que relativement à a et à c, elle ne l'est pas par rapport à l'argument b. Toutefois on obtient une symétrie générale en ajoutant B à ce quotient. Nous définissons donc les différences réciproques de second ordre par

$$\left.\begin{aligned}\rho(a,b,c) &= \frac{a-c}{\rho(a,b)-\rho(b,c)}+B= \\ &= \begin{vmatrix}1, A, Aa\\ 1, B, Bb\\ 1, C, Cc\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1, A, a\\ 1, B, b\\ 1, C, c\end{vmatrix}\end{aligned}\right\}\quad(2)$$

Ici encore la symétrie de la différence réciproque implique la possibilité de dérivation. En supposant b et c constants on peut chercher par $\rho(a, b, c)$ et $\rho(b, c, d)$ des différences réciproques de 3[ième] ordre. La définition

$$\left.\begin{aligned}\rho(a,b,c,d) &= \frac{a-d}{\rho(a,b,c)-\rho(b,c,d)}+\rho(b,c)= \\ &= \begin{vmatrix}1, \rho(a,c), & a\rho(a,c)\\ 1, \rho(b,c), & b\rho(b,c)\\ 1, \rho(d,c), & d\rho(d,c)\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1, \rho(a,c), a\\ 1, \rho(b,c), b\\ 1, \rho(d,c), d\end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix}1, A, a, a^2\\ 1, B, b, b^2\\ 1, C, c, c^2\\ 1, D, d, d^2\end{vmatrix} : \begin{vmatrix}1, A, a, Aa\\ 1, B, b, Bb\\ 1, C, c, Cc\\ 1, D, d, Dd\end{vmatrix}\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

entraîne de nouveau la symétrie de la fonction et la possibilité de la dériver de celle du Tableau.

La définition générale des différences réciproques d'ordre n s'écrit:

$$\rho(a,b,\ldots,f,g) = \frac{a-g}{\rho(a,b,\ldots,f)-\rho(b,\ldots,f,g)}+\rho(b,\ldots,f); \quad (4)$$

nous allons maintenant prouver que la différence réciproque d'ordre n est symétrique par rapport à tous les $n+1$ arguments dont elle dépend et que par conséquent c'est la forme de la fonction du Tableau, $f(x) = X$, qui détermine seule la forme de la fonction $\rho(a, b, \ldots, f, g)$.

Supposons que cette proposition soit vraie pour les différences réciproques d'ordre $n-1$, ou $n-2$, qui se trouvent contenues dans le membre droit de (4); choisissons parmi les $n-1$ arguments, $b \ldots f$, communs à ces trois différences réciproques, un seul, d, que nous faisons sortir avec a ou g des différences réciproques $\rho(a, b, \ldots, f)$ et $\rho(b, \ldots, f, g)$; nous obtenons alors;

$$\left.\begin{aligned} &\rho(a, b, \ldots, d, \ldots, f, g) = \\ &= \frac{a-g}{\dfrac{a-d}{\rho(a,b,\ldots,f)-\rho(b,\ldots,f,d)} - \dfrac{d-g}{\rho(d,b,\ldots,f)-\rho(b,\ldots,f,g)}} + \rho(b, \ldots, d, \ldots, f) = \\ &= \begin{vmatrix} 1, \rho(a, b, \ldots, f), a\rho(a, b, \ldots, f) \\ 1, \rho(d, b, \ldots, f), d\rho(d, b, \ldots, f) \\ 1, \rho(g, b, \ldots, f), g\rho(g, b, \ldots, f) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, \rho(a, b, \ldots, f), a \\ 1, \rho(d, b, \ldots, f), d \\ 1, \rho(g, b, \ldots, f), g \end{vmatrix} \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

d'où il résulte que la fonction $\rho(a, b, \ldots, d, \ldots, f, g)$ est symétrique relativement aux arguments a et g aussi bien que relativement à tous ceux $(b, \ldots, d, \ldots, f)$ à l'égard desquels nous l'avions déjà supposée symétrique. On voit que la différence réciproque reste la même quel que soit l'ordre de ses arguments.

En vertu de (4) et de (5) nous pouvons éclairer par les différences réciproques de 6ième ordre $\rho(a, b, c, d, e, f, g)$ la relation générale entre une différence réciproque quelconque et certaines différences réciproques d'ordre inférieur.

D'après la forme de la formule (5), un nombre à soustraire du membre gauche, $\rho(a, b, c, d, e, f, g)$, figurera dans le membre droit comme devant être soustrait de chacune des différences réciproques de 4ième ordre qui se trouvent contenues dans les déterminants. Si nous prenons pour nombre à soustraire l'expression $\rho(b, c, e)$, on pourra se servir de (4) pour réduire toutes les différences réciproques de 4ième ordre en différences réciproques de 3ième ordre, et après avoir mis les termes du déterminant sous forme entière et introduit dans chaque déterminant une ligne et une colonne premières, on trouvera que

$$\left.\begin{array}{c}\rho(a,b,c,d,e,f,g) = \\ = \begin{vmatrix} 1, \rho(f,b,c,e), f, f^2 \\ 1, \rho(a,b,c,e), a, a^2 \\ 1, \rho(d,b,c,e), d, d^2 \\ 1, \rho(g,b,c,e), g, g^2 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, \rho(f,b,c,e), f, f\rho(f,b,c,e) \\ 1, \rho(a,b,c,e), a, a\rho(a,b,c,e) \\ 1, \rho(d,b,c,e), d, d\rho(d,b,c,e) \\ 1, \rho(g,b,c,e), g, g\rho(g,b,c,e) \end{vmatrix} + \rho(b,c,e)\end{array}\right\} \quad (6)$$

Il résulte de la forme qu'offrent les déterminants de cette formule que dans toutes les colonnes les quatre différences réciproques de 3ième ordre peuvent recevoir un même nombre quelconque à soustraire sans que l'expression en soit changée. Soit $\rho(b, c)$ ce nombre; faisons la réduction en différences réciproques de 2ième ordre; mettons tous les termes sous forme entière; nous aurons alors, en élargissant chaque déterminant d'une ligne et d'une colonne et en faisant entrer $\rho(b, c, e)$ dans le déterminant numérateur:

$$\left.\begin{array}{c}\rho(a,b,c,d,e,f,g) = \\ = \begin{vmatrix} 1, \rho(e,b,c), e, e\rho(e,b,c), e^2\rho(e,b,c) \\ 1, \rho(f,b,c), f, f\rho(f,b,c), f^2\rho(f,b,c) \\ 1, \rho(a,b,c), a, a\rho(a,b,c), a^2\rho(a,b,c) \\ 1, \rho(d,b,c), d, d\rho(d,b,c), d^2\rho(d,b,c) \\ 1, \rho(g,b,c), g, g\rho(g,b,c), g^2\rho(g,b,c) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, \rho(e,b,c), e, e\rho(e,b,c), e^2 \\ 1, \rho(f,b,c), f, f\rho(f,b,c), f^2 \\ 1, \rho(a,b,c), a, a\rho(a,b,c), a^2 \\ 1, \rho(d,b,c), d, d\rho(d,b,c), d^2 \\ 1, \rho(g,b,c), g, g\rho(g,b,c), g^2 \end{vmatrix}\end{array}\right\} \quad (7)$$

Les différences réciproques de 2e ordre contenues dans (7) se réduisent en différences réciproques de 1er ordre par un procédé analogue à celui qui a été appliqué à (5); ici c'est B qu'il faut soustraire:

$$\left.\begin{array}{c}\rho(a,b,c,d,e,f,g) = \\ = \begin{vmatrix} 1, \rho(c,b), c, c\rho(c,b), c^2, c^3 \\ 1, \rho(e,b), e, e\rho(e,b), e^2, e^3 \\ 1, \rho(f,b), f, f\rho(f,b), f^2, f^3 \\ 1, \rho(a,b), a, a\rho(a,b), a^2, a^3 \\ 1, \rho(d,b), d, d\rho(d,b), d^2, d^3 \\ 1, \rho(g,b), g, g\rho(g,b), g^2, g^3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, \rho(c,b), c, c\rho(c,b), c^2, c^2\rho(c,b) \\ 1, \rho(e,b), e, e\rho(e,b), e^2, e^2\rho(e,b) \\ 1, \rho(f,b), f, f\rho(f,b), f^2, f^2\rho(f,b) \\ 1, \rho(a,b), a, a\rho(a,b), a^2, a^2\rho(a,b) \\ 1, \rho(d,b), d, d\rho(d,b), d^2, d^2\rho(d,b) \\ 1, \rho(g,b), g, g\rho(g,b), g^2, g^2\rho(g,b) \end{vmatrix} + B\end{array}\right\} \quad (8)$$

d'où, après une substitution effectuée en vertu de (1) et analogue à celle employée pour obtenir (7):

$$\rho(a,b,c,d,e,f,g) = \left.\begin{vmatrix} 1, B, b, Bb, b^2, Bb^2, Bb^3 \\ 1, C, c, Cc, c^2, Cc^2, Cc^3 \\ 1, E, e, Ee, e^2, Ee^2, Ee^3 \\ 1, F, f, Ff, f^2, Ff^2, Ff^3 \\ 1, A, a, Aa, a^2, Aa^2, Aa^3 \\ 1, D, d, Dd, d^2, Dd^2, dD^3 \\ 1, G, g, Gg, g^2, Gg^2, Gg^3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1, B, b, Bb, b^2, Bb^2, b^3 \\ 1, C, c, Cc, c^2, Cc^2, c^3 \\ 1, E, e, Ee, e^2, Ee^2, e^3 \\ 1, F, f, Ff, f^2, Ff^2, f^3 \\ 1, A, a, Aa, a^2, Aa^2, a^3 \\ 1, D, d, Dd, d^2, Dd^2, d^3 \\ 1, G, g, Gg, g^2, Gg^2, g^3 \end{vmatrix}\right\} \quad (9)$$

La loi générale que nous pouvons tirer de ce qui précède est bien claire, ou plutôt il y en a deux qui alternent suivant que l'ordre est diminué d'un nombre pair ou impair. Le déterminant diviseur est le plus régulier, toutefois ses colonnes présentent également une alternance de deux types, l'un sans, l'autre avec un facteur qui sera ou une différence réciproque ou la fonction elle-même; les deux types ont ceci de commun qu'ils présentent, de gauche à droite, un développement ordonné suivant les puissances de l'argument, à partir de la 0$^{\text{ième}}$. Le déterminant dividende ne diffère du déterminant diviseur que par la dernière colonne où se répète l'avant-dernière colonne multipliée par l'argument. Dans les cas où l'ordre est diminué d'un nombre pair, les deux dernières colonnes du dividende sont multipliées par les différences ou par la valeur de la fonction; alors aucun nombre ne doit être ajouté au quotient. Au contraire dans les cas où l'ordre est diminué d'un nombre impair, les deux dernières colonnes du dividende sont des puissances des arguments; on devra alors y ajouter, comme dans (2), la différence réciproque de l'ordre immédiatement inférieur, différence dont les arguments sont communs à toutes les autres différences réciproques. Dans les formules explicites, où le nombre à ajouter eût été d'ordre — 1, rien n'est ajouté, non plus que dans (1) et (3).

§ 2.

Tout tableau de fonctions à arguments arbitraires, mais que nous choisirons cependant jusqu'à nouvel ordre différents les uns des autres, peut être augmenté de différences réciproques, tout aussi bien que de différences divisées ou simples, de la forme du schéma suivant:

$$\begin{array}{llllll}
a & A & & & & \\
 & & \rho(a,b) & & & \\
b & B & & \rho(a,b,c) & & \\
 & & \rho(b,c) & & \rho(a,b,c,d) & \\
c & C & & \rho(b,c,d) & & \rho(a,b,c,d,x) \\
 & & \rho(c,d) & & \rho(b,c,d,x) & \\
d & D & & \rho(c,d,x) & & \\
 & & \rho(d,x) & & & \\
x & X & & & &
\end{array} \tag{10}$$

Ce schéma a l'avantage de rapporter, d'une manière bien claire, toute différence réciproque aux arguments dont elle dépend; en même temps il est assez complet pour être utilisé pour l'interpolation. Soit X la valeur de la fonction qu'on se propose de déterminer par une interpolation pour l'argument x; les relations (1), (2), (3), .., (4), peuvent alors se transcrire ainsi:

$$X - D = \frac{x-d}{\rho(d,x)}$$

$$\rho(d,x) - \rho(c,d) = \frac{x-c}{\rho(c,d,x) - D}$$

$$\rho(c,d,x) - \rho(b,c,d) = \frac{x-b}{\rho(b,c,d,x) - \rho(c,d)}$$

$$\rho(b,c,d,x) - \rho(a,b,c,d) = \frac{x-a}{\rho(a,b,c,d,x) - \rho(b,c,d)}$$

En éliminant les différences réciproques qui dépendent de x, jusqu'à celle, exclusivement, de l'ordre le plus élevé, on obtient la formule générale d'interpolation que voici:

$$X = D + \cfrac{x-d}{\rho(c,d) + \cfrac{x-c}{\rho(b,c,d) - D + \cfrac{x-b}{\rho(a,b,c,d) - \rho(c,d) + \cfrac{x-a}{\rho(a,b,c,d,x) - \rho(b,c,d.)}}}} \tag{11}$$

Pour que cette identité soit applicable, il faut que l'une des différences réciproques, $\rho(x, a, b, c, d)$, dépendant de x aussi bien que des arguments du Tableau, soit connue. Du moment que nous connaissons la valeur de $\rho(x, a, b, c, d)$, nous pouvons calculer successivement toutes les différences réciproques d'ordres inférieurs, que nous venons d'éliminer, en finissant par X, ou bien nous pouvons calculer, comme cela se fait ordinairement, les convergentes successives de la fraction continue.

Dans la pratique il faut, pour que le procédé par interpolation soit applicable, que l'une des différences, d'un ordre pas trop élevé, se montre constante. L'existence d'une telle différence peut être constatée à mesure qu'on aura calculé les valeurs du schéma (10) du Tableau. Si les différences réciproques d'ordre n sont constantes, celles d'ordre $n + 1$ seront égales à ∞. Dans ce cas la fraction continue (11) est finie; on peut la mettre sous la forme d'une fraction simple, et dans les cas où $n = 2m$, le dénominateur de cette fraction sera de degré m, tandis que le degré du numérateur sera inférieur ou tout au plus égal à m. Dans les cas où $n = 2m - 1$, le numérateur prendra le degré m, et $m - 1$ sera le degré maximum du dénominateur. Qu'il en soit ainsi, c'est ce dont on peut se rendre compte en développant la forme générale des convergentes, ou bien en considérant les équations du § 1.

Il résulte de (9) que les différences réciproques de 5ième ordre ne seront constantes, ni celles de 6ième ordre, infinies, que si leurs diviseurs sont $= 0$, ou bien si l'équation

$$X = \frac{t_0 + t_1 x + t_2 x^2 + t_3 x^3}{n_0 + n_1 x + n_2 x^2}$$

est satisfaite identiquement par la fonction du Tableau $A = f(a) \ldots . G = f(g)$. Les rapports des coefficients t et n se déterminent alors par le moyen des sous-déterminants; il faut surtout noter que

$$t_3 \begin{vmatrix} 1, A, a, Aa, a^2, a^3 \\ 1, B, b, Bb, b^2, b^3 \\ 1, C, c, Cc, c^2, c^3 \\ 1, D, d, Dd, d^2, d^3 \\ 1, E, e, Ee, e^2, e^3 \\ 1, F, f, Ff, f^2, f^3 \end{vmatrix} = n_2 \begin{vmatrix} 1, A, a, Aa, a^2, Aa^2 \\ 1, B, b, Bb, b^2, Bb^2 \\ 1, C, c, Cc, c^2, Cc^2 \\ 1, D, d, Dd, d^2, Dd^2 \\ 1, E, e, Ee, e^2, Ee^2 \\ 1, F, f, Ff, f^2, Ff^2 \end{vmatrix} \tag{12}$$

donc:

$$\frac{n_2}{t_3} = \rho(a, b, c, d, e, f)$$

où le membre de droite est la différence réciproque, constante, de 5ième ordre. Si cette dernière différence est égale à zéro, le degré du diviseur de X sera inférieur au degré normal; si elle est egale à ∞, la différence réciproque de 4ième ordre est déjà constante; alors le déterminant du membre droit de (12) est égal à zéro et la fonction aura par conséquent la forme suivante:

$$X = \frac{t_0 + t_1 x + t_2 x^2}{n_0 + n_1 x + n_2 x^2},$$

d'où:

$$\frac{t_2}{n_2} = \rho(a, b, c, d, e),$$

parce que t_2 et n_2 doivent être proportionnels aux sous-déterminants,

$$n_2 \begin{vmatrix} 1, A, a, Aa, Aa^2 \\ 1, B, b, Bb, Bb^2 \\ 1, C, c, Cc, Cc^2 \\ 1, D, d, Dd, Dd^2 \\ 1, E, e, Ee, Ee^2 \end{vmatrix} = t_2 \begin{vmatrix} 1, A, a, Aa, a^2 \\ 1, B, b, Bb, b^2 \\ 1, C, c, Cc, c^2 \\ 1, D, d, Dd, d^2 \\ 1, E, e, Ee, e^2 \end{vmatrix} \tag{13}$$

Si la différence réciproque constante de 4ième ordre, ou de quelque autre ordre pair est égale à zéro, nous en pouvons conclure que le degré du dividende dénominateur de X est inférieur au degré normal.

§ 3.

Le domaine élémentaire de la formule d'interpolation de Newton ne comprend que les fonctions rationnelles, finies et entières; l'interpolation par différences réciproques s'applique en outre à toutes les fonctions rationnelles fractionnées.

De même que le domaine de la formule d'interpolation de Newton peut être élargi jusqu'à comprendre des séries infinies, pourvu toutefois qu'elles soient convergentes, nous pouvons appliquer l'interpolation par différences réciproques aux fractions continues infinies; et ici la convergence n'est pas aussi strictement nécessaire que dans le premier cas. Non seulement cette sorte de divergences, qui sont des convergences vers la valeur ∞, sont sans importance dans les fractions continues, mais on trouve même parmi les fractions continues dont la valeur oscille indéfiniment, des cas où l'interpolation par différences réciproques devient légitime.

Citons à titre d'exemple la fonction de la racine carrée. Nous y avons, correspondant aux arguments arbitraires a^2, $b^2, c^2, d^2 \ldots x^2$ les valeurs de fonction $a, b, c, d \ldots x$, et le tableau des différences réciproques prend la forme que voici:

$$\begin{array}{llllll}
a^2 & a & & & & \\
 & & a+b & & & \\
b^2 & b & & a+b+c & & \\
 & & b+c & & a+b+c+d & \\
c^2 & c & & b+c+d & & a+b+c+d+x \\
 & & c+d & & b+c+d+x & \\
d^2 & d & & c+d+x & & \\
 & & d+x & & & \\
x^2 & x & & & &
\end{array}$$

et généralement:

$$\rho(a^2, b^2, .., g^2) = a+b+..+g.$$

La fraction continue d'interpolation s'écrit:

$$x = d + \cfrac{x^2 - d^2}{c + d + \cfrac{x^2 - c^2}{b + c + \cfrac{x^2 - b^2}{a + b + \cfrac{x^2 - a^2}{x + a}}}} \tag{14}$$

Les convergentes sont:

$$x_1 = d,\quad x_2 = \frac{cd + x^2}{c + d},\quad x_3 = \frac{bcd + x^2(b + c + d)}{bc + bd + cd + x^2},$$

$$x_4 = \frac{abcd + x^2(ab + ac + ad + bc + bd + cd) + x^4}{abc + abd + acd + bcd + x^2(a + b + c + d)},$$

et plus généralement:

$$\frac{x_n - x}{x_n + x} = \frac{a - x}{a + x} \cdots \frac{d - x}{d + x} \tag{15}$$

En regardant de très près le terme-reste, $a + x$, que présente le dernier dénominateur, on voit que l'équation à fraction continue (14) n'est au fond qu'une transcription de l'équation de 2ième degré, qui a pour racines $\pm x$; elle est assez facile à vérifier pour les deux racines moyennant une série de réductions exécutées du bas en haut. Cet énoncé est vrai, non seulement quand le nombre des termes est fini, mais aussi dans les cas où il est infini; notons encore qu'il est sans importance pour la validité de ce genre de fractions continues infinies, que le reste soit donné d'avance ou qu'il doive être calculé au moyen des termes généraux de la fraction, en comparant celle-ci à une autre fraction continue déjà connue.

La fraction continue infinie

$$y = \cfrac{10}{4 - \cfrac{6}{8 - \cfrac{26}{12 - \cfrac{50}{16 - \cfrac{82}{20 - \cdots - \cfrac{1 + (2n - 1)^2}{4n - \cdots}}}}}},$$

s'accorde avec (14) abstraction faite des premiers termes; les arguments forment la série des nombres carrés impairs, et x^2 est égal à -1; le reste sera donc

$$\frac{1+(2n-1)^2}{2n-1+i} \text{ au lieu de } \frac{1+(2n-1)^2}{4n-..}$$

et la fraction continue infinie détermine $y = \dfrac{15+5i}{3+2i}$ aussi bien que l'équation $13y^2 - 110y + 250 = 0$.

Il en résulte que la fraction continue d'interpolation est quelquefois l'expression exacte d'une fonction ambiguë.

Il en est autrement des convergentes de la fraction continue. Dans les cas semblables à celui que nous venons de considérer la série des convergentes tournera à l'infini autour de la vérité, — mais notre théorie n'en est pas infirmée.

Dans la pratique il importe d'avoir constaté qu'en appliquant des fractions continues de la forme représentée en (14) on n'obtient ni l'une ni l'autre racine de l'équation mais un résultat où les deux racines se trouvent représentées.

Si nous voulons que conformément à leur nom les convergentes soient des valeurs approchées de l'une des valeurs d'une fonctions ambiguë, nous devons tenir bien séparées les deux branches de la fonction au lieu d'admettre dans le Tableau des valeurs tirées des deux branches indistinctement.

L'équation (15) nous fournit un renseignement sur la racine carrée: il est clair que si les valeurs $a \ldots d$ appartiennent toutes à la branche positive, les convergentes se rapprocheront de la racine positive. Mais si l'on admettait parmi $a \ldots d$ des valeurs prises dans la branche négative, ces valeurs négatives tendraient à éloigner leur convergentes de $+x$ et à les rapprocher de $-x$. Dans toute interpolation newtonienne il est de rigueur que le Tableau ne se rapporte qu'à une seule branche de fonctions; c'est là une règle qu'il y a avantage à suivre en interpolant par différences réciproques.

Mais tout en observant cette règle, il faut se rappeler que la convergence rapide vers l'une des racines, convergence qui caractérise l'extraction des racines par fractions continues, n'est qu'apparente. Les fractions continues dont il s'agit ici resteront toujours conséquentes avec elles-mêmes; la manifestation continuelle de l'une des racines n'exclut pas l'apparition de l'autre. Regardons par exemple le reste d'une telle fraction continue qui semble converger rapidement vers la racine positive. Si dans ce reste nous introduisons la racine négative, tout est changé du même coup, et nous verrons la racine négative apparaître à travers toutes les convergentes précédentes.

Le domaine de l'interpolation par différences réciproques est donc très étendu et très important. Dans cette méthode, les pôles, les changements de signe au passage par $f(x) = \infty$ ne constituent pas des singularités; et du moment que nous traitons le reste méthodiquement, il n'y a pas de difficulté sérieuse dans la rencontre des branches de fonctions ambiguës non plus que dans le passage des valeurs de fonctions réelles aux valeurs de fonctions imaginaires.

§ 4.

En dehors des exemples donnés ci-dessus, auxquels on peut ajouter le cas de $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, les cas sont probablement rares où la forme de fonction générale puisse être déterminée explicitement pour les différences réciproques. La cause en est surtout que les différences réciproques sont fonctions de plusieurs variables. On peut y remédier en supposant que les arguments sont soumis à une loi déterminée (en les faisant équidistants par exemple); le moyen le plus radical est de les faire identiques les uns aux autres. De telles différences réciproques à argument répété formeront, à l'égal de la fonction principale d'où elles sont dérivées, des fonctions de l'unique argument; on peut les exprimer par

$$\rho(x,x) = \rho_1(X), \rho(x,x,x) = \rho_2(X), \rho(x,x,x,x) = \rho_3(X), \ldots \quad (16)$$

Cette expression a l'avantage d'indiquer distinctement l'ordre des différences réciproques et leur dépendance de la fonction X.

De même que les différences divisées de Newton à argument répété fournissent le fondement du calcul différentiel ordinaire, ces différences réciproques à argument répété peuvent servir de base à un calcul différentiel dont le domaine se trouvera sensiblement élargi.

Il va sans dire que ces différences réciproques, non plus que les différences divisées correspondantes, ne se laissent pas calculer à l'aide des chiffres du Tableau, car si nous essayons de les calculer avec les formules ci-dessus, nous obtenons une différence réciproque de valeur indéterminée toutes les fois que deux arguments identiques devaient entrer dans la même différence réciproque.

Quant à $\rho_1(X)$ nous pouvons la déterminer pourvu que l'interpolation de X à travers $\rho(x,a)$, $\rho(x,a,b)$, $\rho(x,a,b,c)$ ..... [voir (11)] puisse se faire légitimement dans le Tableau dont nous disposons; nous n'avons qu'à répéter l'interpolation de X en nous servant des différences réciproques, et nous trouverons

$$\rho_1(X)-\rho(x,a) = \frac{x-a}{\rho(x,x,a)-X}$$

$$\rho(x,x,a)-\rho(x,a,b) = \frac{x-b}{\rho(x,x,a,b)-\rho(x,a)}$$

$$\rho(x,x,a,b)-\rho(x,a,b,c) = \frac{x-c}{\rho(x,x,a,b,c)-\rho(x,a,b)}$$

donc

$$\rho_1(X)=\rho(x,a)+\cfrac{x-a}{\rho(x,a,b)-X+\cfrac{x-b}{\rho(x,a,b,c)-\rho(x,a)+\cfrac{x-c}{\rho(x,x,a,b,c)-\rho(x,a,b)}}} \tag{17}$$

A l'aide d'une troisième interpolation où on fera usage de ce dernier résultat et des autres résultats que nous venons d'employer, on arrivera par

$$\rho_2(X) - \rho(x,x,a) = \frac{x-a}{\rho(x,x,x,a) - \rho_1(X)}$$

$$\rho(x,x,x,a) - \rho(x,x,a,b) = \frac{x-b}{\rho(x,x,x,a,b) - \rho(x,x,a)}$$

à

$$\rho_2(X) = \rho(x,x,a) + \cfrac{x-a}{\rho(x,x,a,b) - \rho_1(X) + \cfrac{x-b}{\rho(x,x,x,a,b) - \rho(x,x,a)}} \tag{18}$$

etc.

La méthode indiquée en (17) et en (18) suffit pour le calcul numérique des différences réciproques à argument répété; elle serait moins satisfaisante s'il s'agissait de fonder un calcul différentiel sur cette méthode d'interpolation. Dans ce cas l'application difficile des fractions continues, et peut-être aussi l'état peu avancé de la théorie des fractions continues, se ferait sentir comme un grand embarras.

Aussi me contenterai-je d'énoncer le théorème suivant lequel les différences réciproques (à argument répété) d'ordre $n+1$ se dérivent de celles d'ordre n. En représentant n par 3, nous supposons que $\rho_n(X) = \rho(x,x,x,x)$ est une fonction connue de x et que $\rho_n(Y) = \rho(y,y,y,y)$ est cette même fonction de l'argument y. Nous supposons en outre qu'il est possible de former la première différence réciproque: $\frac{x-y}{\rho(x,x,x,x) - \rho(y,y,y,y)}$; mais nous ne devons pas oublier que la différence réciproque d'ordre $n+1$ ne s'obtient pas en y faisant $y = x$. Le passage de l'une de ces différences réciproques d'ordre n à l'autre par des différences réciproques d'ordre $n+1$, n'est possible qu'à travers n termes intermédiaires, $\rho(x,x,x,y)$, $\rho(x,x,y,y)$, $\rho(x,y,y,y)$; les différences simples d'ordre n sont

$$\rho(x,x,x,x) - \rho(x,x,x,y) = \frac{x-y}{\rho(x,x,x,x,y) - \rho(x,x,x)}$$

$$\rho(x,x,x,y) - \rho(x,x,y,y) = \frac{x-y}{\rho(x,x,x,y,y) - \rho(x,x,y)}$$

$$\rho(x,x,y,y) - \rho(x,y,y,y) = \frac{x-y}{\rho(x,x,y,y,y) - \rho(x,y,y)}$$

$$\rho(x,y,y,y) - \rho(y,y,y,y) = \frac{x-y}{\rho(x,y,y,y,y) - \rho(y,y,y)}$$

d'où, en les ajoutant ensemble, en posant $y = x$, et en nous rappelant en outre que $\dfrac{x-y}{\rho(x,x,x,x) - \rho(y,y,y,y)} = \rho_1(\rho_n(X))$, nous obtenons:

$$\rho_{n+1}(X) = (n+1)\rho_1(\rho_n(X)) + \rho_{n-1}(X). \tag{19}$$

Comme nous avons $\rho_0(X) = X$ et $\rho_1(X) = \dfrac{dx}{dX}$, nous pouvons, à l'aide d'une application réitérée de (19), déterminer $\rho_r(X)$ pour tout ordre r fini; du moins nous pouvons déterminer cette différence pour toutes les fonctions qui peuvent être différentiées: il est vrai que cette détermination n'est pas toujours également facile à effectuer.

Supposons maintenant que nous connaissons pour un argument, a, toute la série infinie de différences réciproques $\rho_r(A)$, nous pouvons alors former de cette série une fraction continue générale d'interpolation, analogue à la série de Taylor. En mettant, dans (11), $a = b = c = d$, nous obtenons:

$$X = A + \cfrac{x-a}{\rho_1(A) + \cfrac{x-a}{\rho_2(A) - A + \cfrac{x-a}{\rho_3(A) - \rho_1(A) + \cfrac{x-a}{\rho(a,a,a,a,x) - \rho_2(A)}}}} \tag{20}$$

et en faisant abstraction de la forme exacte du reste, nous écrivons en vertu de (19):

$$X = A + \cfrac{x-a}{\rho_1(A) + \cfrac{x-a}{2\rho_1(\rho_1(A)) + \cfrac{x-a}{3\rho_1(\rho_2(A)) + \cfrac{x-a}{4\rho_1(\rho_3(A)) +}}}} \tag{21}$$

§ 5.

En terminant cette communication il convient d'indiquer les relations qui existent entre les différences réciproques à argument répété et les quotients différentiels d'une même fonction.

Si nous considérons les expressions (2), (3), (9), (12), (13) de la différence réciproque générale comme des quotients de deux déterminants, nous en pouvons obtenir les expressions correspondantes de différences réciproques à argument répété en remplaçant dans tous les déterminants en question la ligne $r^{\text{ième}}$ par les $(r-1)^{\text{ièmes}}$ quotients différentiels des nombres correspondants de la première ligne. En nous rappelant que

$$\frac{d^s(Aa^r)}{da^s} = A^{(s)}a^r + \frac{s\cdot r}{1}A^{(s-1)}a^{r-1} + \frac{s(s-1)r(r-1)}{1\cdot 2}A^{(s-2)}a^{r-2} + \ldots,$$

nous obtenons des déterminants se réduisant en vertu de théorèmes bien connus, et en écrivant ici encore $X^{(r)} = \frac{d^rX}{dx^r}$ nous avons

$$\begin{aligned}
\rho_1(X) &= 1 : X', \\
\rho_2(X) &= \begin{vmatrix} 1\,X, & X' \\ 2\,X', & X'' \end{vmatrix} : X'', \\
\rho_3(X) &= 2\,X''' : \begin{vmatrix} 2\,X', & X'' \\ 3\,X'', & X''' \end{vmatrix}, \\
\rho_4(X) &= \begin{vmatrix} 1\,X, & 2\,X', & X'' \\ 3\,X', & 3\,X'', & X''' \\ 6\,X'', & 4\,X''', & X^{(4)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3\,X'', & X''' \\ 4\,X''', & X^{(4)} \end{vmatrix}, \\
\rho_5(X) &= 3\begin{vmatrix} 4\,X''', & X^{(4)} \\ 5\,X^{(4)}, & X^{(5)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 3\,X', & 3\,X'', & X''' \\ 6\,X'', & 4\,X''', & X^{(4)} \\ 10\,X''', & 5\,X^{(4)}, & X^{(5)} \end{vmatrix}, \\
\rho_6(X) &= \begin{vmatrix} 1\,X, & 3\,X', & 3\,X'', & X''' \\ 4\,X', & 6\,X'', & 4\,X''', & X^{(4)} \\ 10\,X'', & 10\,X''', & 5\,X^{(4)}, & X^{(5)} \\ 20\,X''', & 15\,X^{(4)}, & 6\,X^{(5)}, & X^{(6)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 6\,X'', & 4\,X''', & X^{(4)} \\ 10\,X''', & 5\,X^{(4)}, & X^{(5)} \\ 15\,X^{(4)}, & 6\,X^{(5)}, & X^{(6)} \end{vmatrix},
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\rho_7(X) = 4 \begin{vmatrix} 10\,X''', 5\,X^{(4)}, X^{(5)} \\ 15\,X^{(4)}, 6\,X^{(5)}, X^{(6)} \\ 21\,X^{(5)}, 7\,X^{(6)}, X^{(7)} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 4\,X', & 6\,X'', & 4\,X''', & X^{(4)} \\ 10\,X'', & 10\,X''', & 5\,X^{(4)}, & X^{(5)} \\ 20\,X''', & 15\,X^{(4)}, & 6\,X^{(5)}, & X^{(6)} \\ 35\,X^{(4)}, & 21\,X^{(5)}, & 7\,X^{(6)}, & X^{(7)} \end{vmatrix}. \tag{22}$$

La loi générale est facile à reconnaître; on peut la rendre évidente à l'aide d'une notation abrégée: Indiquons par des chiffres romains les nombres de lignes des déterminants; par l'index, l'ordre du quotient différentiel le moins élevé qui s'y trouve contenu, nous obtenons alors:

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_r &= \frac{d^r X}{dx^r}, \\ \mathrm{II}_r &= \begin{vmatrix} (r+1)\,\mathrm{I}_r, & \mathrm{I}_{r+1} \\ (r+2)\,\mathrm{I}_{r+1}, & \mathrm{I}_{r+2} \end{vmatrix}, \\ 2\cdot\mathrm{III}_r &= \begin{vmatrix} (r+2)(r+1)\,\mathrm{I}_r, & (r+2)\,\mathrm{I}_{r+1}, & \mathrm{I}_{r+2} \\ (r+3)(r+2)\,\mathrm{I}_{r+1}, & (r+3)\,\mathrm{I}_{r+2}, & \mathrm{I}_{r+3} \\ (r+4)(r+3)\,\mathrm{I}_{r+2}, & (r+4)\,\mathrm{I}_{r+3}, & \mathrm{I}_{r+4} \end{vmatrix}, \\ 6\cdot 2\cdot\mathrm{IV}_r &= \begin{vmatrix} (r+3)(r+2)(r+1)\mathrm{I}_r, & (r+3)(r+2)\mathrm{I}_{r+1}, & (r+3)\,\mathrm{I}_{r+2}, & \mathrm{I}_{r+3} \\ (r+4)(r+3)(r+2)\,\mathrm{I}_{r+1}, & (r+4)(r+3)\mathrm{I}_{r+2}, & (r+4)\,\mathrm{I}_{r+3}, & \mathrm{I}_{r+4} \\ (r+5)(r+4)(r+3)\mathrm{I}_{r+2}, & (r+5)(r+4)\mathrm{I}_{r+3}, & (r+5)\,\mathrm{I}_{r+4}, & \mathrm{I}_{r+5} \\ (r+6)(r+5)(r+4)\mathrm{I}_{r+3}, & (r+6)(r+5)\mathrm{I}_{r+4}, & (r+6)\,\mathrm{I}_{r+5}, & \mathrm{I}_{r+6} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{23}$$

etc.

d'où il résulte que

$$\begin{aligned} \rho_0(X) &= \frac{\mathrm{I}_0}{1}, \ \rho_2(X) = \frac{\mathrm{II}_0}{\mathrm{I}_2}, \ \rho_4(X) = \frac{\mathrm{III}_0}{\mathrm{II}_2}, \ \rho_6(X) = \frac{\mathrm{IV}_0}{\mathrm{III}_2} \\ \rho_1(X) &= \frac{1}{\mathrm{I}_1}, \ \rho_3(X) = \frac{2\,\mathrm{I}_3}{\mathrm{II}_1}, \ \rho_5(X) = \frac{3\,\mathrm{II}_3}{\mathrm{III}_1}, \ \rho_7(X) = \frac{4\,\mathrm{III}_3}{\mathrm{IV}_1} \end{aligned} \tag{24}$$

D'après un théorème relatif aux déterminants fournis par les sous-déterminants d'un déterminant (déterminant de systèmes adjoints), il existe entre les déterminants ci-dessus des relations qui peuvent nous être utiles ici, et notamment

$$\left.\begin{aligned} (r+1)\ \mathrm{II}_{r+1}\ \mathrm{II}_{r-1} - (r+3)\ \mathrm{II}_r^2 &= 2\ \mathrm{I}_{r+1}\,\mathrm{III}_{r-1}, \\ (r+2)\,\mathrm{III}_{r+1}\,\mathrm{III}_{r-1} - (r+5)\,\mathrm{III}_r^2 &= 3\ \mathrm{II}_{r+1}\mathrm{IV}_{r-1}, \\ (r+3)\,\mathrm{IV}_{r+1}\mathrm{IV}_{r-1} - (r+7)\,\mathrm{IV}_r^2 &= 4\,\mathrm{III}_{r+1}\ \mathrm{V}_{r-1}. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Pour $r=1$ et $r=2$ nous avons:

$$\begin{array}{llll}
\mathrm{I}_0\,\mathrm{I}_2-\mathrm{II}_0=2\,\mathrm{I}_1^2 & & 2\,\mathrm{I}_1\,\mathrm{I}_3-1\,\mathrm{II}_1=3\,\mathrm{I}_2^2 \\
\mathrm{II}_0\,\mathrm{II}_2-\mathrm{I}_2\mathrm{III}_0=2\,\mathrm{II}_1^2 & & 3\,\mathrm{II}_1\,\mathrm{II}_3-2\,\mathrm{I}_3\mathrm{III}_1=5\,\mathrm{II}_2^2 \\
\mathrm{III}_0\mathrm{III}_2-\mathrm{II}_2\mathrm{IV}_0=2\,\mathrm{III}_1^2 & & 4\,\mathrm{III}_1\mathrm{III}_3-3\,\mathrm{II}_3\mathrm{IV}_1=7\,\mathrm{III}_2^2 \\
\mathrm{IV}_0\mathrm{IV}_2-\mathrm{III}_2\,\mathrm{V}_0=2\,\mathrm{IV}_1^2 & & 5\,\mathrm{IV}_1\mathrm{IV}_3-4\,\mathrm{III}_3\,\mathrm{V}_1=9\,\mathrm{IV}_2^2
\end{array}$$

d'où:

$$\left.\begin{array}{ll}
\rho_2-\rho_0=-\dfrac{2\,\mathrm{I}_1^2}{\mathrm{I}_2}=2\rho_1(\rho_1) & \rho_3-\rho_1=\dfrac{3\,\mathrm{I}_2^2}{\mathrm{I}_1\mathrm{II}_1}=3\rho_1(\rho_2) \\
\rho_4-\rho_2=-\dfrac{2\,\mathrm{II}_1^2}{\mathrm{I}_2\mathrm{II}_2}=4\rho_1(\rho_3) & \rho_5-\rho_3=\dfrac{5\,\mathrm{II}_2^2}{\mathrm{II}_1\mathrm{III}_1}=5\rho_1(\rho_4) \\
\rho_6-\rho_4=-\dfrac{2\,\mathrm{III}_1^2}{\mathrm{II}_2\mathrm{III}_2}=6\rho_1(\rho_5) & \rho_7-\rho_5=\dfrac{7\,\mathrm{III}_2^2}{\mathrm{III}_1\mathrm{IV}_1}=7\rho_1(\rho_6) \\
\rho_8-\rho_6=-\dfrac{2\,\mathrm{IV}_1^2}{\mathrm{III}_2\mathrm{IV}_2}=8\rho_1(\rho_7) & \rho_9-\rho_7=\dfrac{9\,\mathrm{IV}_2^2}{\mathrm{IV}_1\mathrm{V}_1}=9\rho_1(\rho_8)
\end{array}\right\}\quad(26)$$

Il en résulte que le développement général en fractions continues par quotients différentiels s'écrit:

$$X=A+\cfrac{\mathrm{I}_1(x-a)}{1-\cfrac{\mathrm{I}_2(x-a)}{2\,\mathrm{I}_1-\cfrac{\mathrm{II}_1(x-a)}{3\,\mathrm{I}_2-\cfrac{\mathrm{I}_1\mathrm{II}_2(x-a)}{2\,\mathrm{II}_1-\cfrac{\mathrm{I}_2\mathrm{III}_1(x-a)}{5\,\mathrm{II}_2-\cfrac{\mathrm{II}_1\mathrm{III}_2(x-a)}{2\,\mathrm{III}_1-\cfrac{\mathrm{II}_2\mathrm{IV}_1(x-a)}{7\,\mathrm{III}_2-\cfrac{\mathrm{III}_1\mathrm{IV}_2(x-a)}{2\,\mathrm{IV}_1-}}}}}}}}\quad(27)$$

(I, II, III et IV dépendent ici de a, non pas de x).

Pour $\dfrac{1}{X}$ nous obtenons une fraction continue indépendente qui présente une analogie remarquable avec celle de X. En utilisant les quotients différentiels: $\mathrm{I}_r=\dfrac{d^rA}{da^r}$ et leurs déterminants, nous avons:

$$\rho_0\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{1}{\mathrm{I}_0},\ \rho_2\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{\mathrm{I}_2}{\mathrm{II}_0},\ \rho_4\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{\mathrm{II}_2}{\mathrm{III}_0}$$

$$\rho_1\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{\mathrm{II}_1}{\mathrm{I}_1},\ \rho_3\left(\frac{1}{A}\right)=\frac{2\,\mathrm{III}_1}{\mathrm{II}_1}\ \ldots,$$

et

$$\rho_1\left(\rho_0\left(\frac{1}{A}\right)\right) = -\frac{\mathrm{I}_0^2}{\mathrm{I}_1}, \; \rho_1\left(\rho_2\left(\frac{1}{A}\right)\right) = -\frac{\mathrm{II}_0^2}{\mathrm{I}_1\mathrm{II}_1}, \; \rho_1\left(\rho_4\left(\frac{1}{A}\right)\right) = -\frac{\mathrm{III}_0^2}{\mathrm{II}_1\mathrm{III}_1}$$
$$\rho_1\left(\rho_1\left(\frac{1}{A}\right)\right) = \frac{\mathrm{I}_1^2}{\mathrm{I}_0\mathrm{II}_0}, \; \rho_1\left(\rho_3\left(\frac{1}{A}\right)\right) = \frac{\mathrm{II}_1^2}{2\,\mathrm{II}_0\mathrm{III}_0}, \ldots, \tag{28}$$

et par suite

$$\frac{1}{X} = \frac{1}{A}\left\{1 - \cfrac{\mathrm{I}_1(x-a)}{A - \cfrac{\mathrm{II}_0(x-a)}{2\,\mathrm{I}_1 - \cfrac{A\,\mathrm{II}_1(x-a)}{3\,\mathrm{II}_0 - \cfrac{\mathrm{I}_1\mathrm{III}_0(x-a)}{2\,\mathrm{II}_1 - \cfrac{\mathrm{II}_0\mathrm{III}_1(x-a)}{5\,\mathrm{III}_0 - }}}}}\right. \tag{29}$$